

---

# ESTIMACIÓN DE EQUIVALENCIAS DE ESCALA

---

*Manuel Muñoz Conde\**

Desde mediados de los años ochenta trabajo en el análisis de la pobreza examinando los presupuestos familiares, el ingreso y especialmente el gasto de los hogares. He construido líneas de pobreza, analizado los patrones de consumo, estudiado la distribución del ingreso y colaborado en el análisis de la calidad de vida. Esto ha abierto perspectivas que constituyen un programa de investigación, el cual se ha desarrollado en diferentes etapas y escenarios.

Uno de los aspectos en que he centrado mi atención por su importancia teórica y en el diseño de políticas es la manera de abordar las necesidades de las personas, según sus características sociodemográficas. En el desarrollo del programa de investigación surgió la posibilidad de trabajar con el profesor Federico Perali de la Universidad de Verona, posibilidad que concreté en el año sabático de 2008-2009. Esa etapa culmina con este trabajo en el que propongo una manera de abordar el problema de falta de información de precios

\* Doctor en Ciencias Económicas, Profesor titular y coordinador del doctorado en Ciencias Económicas de la Universidad Nacional, Bogotá, Colombia [mamuconde@yahoo.com]. Una versión anterior de este trabajo se presentó al Consejo Superior Universitario de la Universidad Nacional de Colombia para la promoción a profesor titular. Agradezco a dicha universidad por su colaboración, especialmente al Doctorado de Ciencias Económicas; al Departamento de Ciencias Económicas de la Universidad de Verona, y al de Fundamentos de Economía e Historia Económica de la Universidad de Alcalá de Henares. Así mismo, agradezco al profesor Federico Perali por su decidido apoyo y por sus sugerencias y comentarios, a los profesores Carlos Mario Gómez, de la Universidad de Alcalá de Henares, e Iván Hernández, de la Universidad Nacional de Colombia. Así como a Yadira Luna, asistente del doctorado, y a Lara Pizzo, que cursó su doctorado en la Universidad de Padua. Fecha de recepción: 29 de junio de 2013, fecha de modificación: 2 de diciembre de 2013, fecha de aceptación: 25 de abril 2014. Sugerencia de citación: Muñoz C., M. "Estimación de equivalencias de escala", *Revista de Economía Institucional* 16, 30, 2014, pp. 99-130.

para estimar la demanda y las escalas de equivalencia, y construyo un modelo de demanda en el que se introducen variables demográficas para estimar estas escalas. Las escalas equivalentes sirven para medir de mejor manera el consumo de hogares con diferentes características demográficas, pues la comparación per cápita no tiene en cuenta que las necesidades varían según las edades y, por tanto, las comparaciones per cápita no son del todo adecuadas.

Para llevar a cabo este trabajo utilicé la Encuesta de Calidad de Vida 2003 (ECV2003) realizada por el DANE, que recoge información sobre los aspectos que determinan el bienestar económico de los hogares: las condiciones de la vivienda, los servicios con que cuentan, los ingresos y gastos, y las características sociodemográficas de sus miembros<sup>1</sup>. Dado el tamaño de la muestra, unos 22.000 hogares, los resultados de la encuesta son válidos a nivel de región y zona y, en Bogotá, a nivel de localidad.

La información de gastos y características sociodemográficas de los hogares que contiene la Encuesta permite hacer estimaciones de demanda, pero estas tienen graves problemas por falta de información de precios. Una de las principales tareas fue calcular los precios implícitos o unidades de valor, para luego estimar la demanda teniendo en cuenta esos precios. Así la estimación del sistema de demanda mejora notablemente y se obtienen escalas de equivalencia razonables.

El trabajo se divide en seis secciones. En la primera se presentan los antecedentes y la motivación de la investigación, se señalan la relevancia del problema y las dificultades para encontrar soluciones; en la segunda se explica el modelo que se estima y cómo enfrentar las dificultades. En la tercera se expone la metodología y se destacan dos puntos importantes: el cálculo de los precios implícitos a partir del gasto y la estimación del modelo. En la cuarta se muestran los resultados, las elasticidades estimadas y la equivalencia adulto de los niños de 0 a 7 años y de 8 a 17 años. Por último se presentan algunas conclusiones.

## MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES

La preocupación por hacer comparaciones interpersonales para analizar el bienestar ha llevado a muchos investigadores a preguntarse si las comparaciones son válidas cuando las personas tienen características diferentes y, cabe suponer, necesidades diferentes.

<sup>1</sup> Estas encuestas están dentro del espíritu de las encuestas LSMS (Living Standard Measurement Studies) que realiza o promueve el Banco Mundial.

En los estudios de distribución del ingreso se suele usar el ingreso per cápita; así se pasa por alto que un hogar compuesto por cuatro adultos y uno compuesto por dos adultos y dos niños menores de 18 años no son iguales. Si ambos tuviesen el mismo ingreso per cápita y la única diferencia fuese la composición por edades, el hogar con dos niños estaría mejor que el hogar de adultos, porque las necesidades de consumo de un niño son menores que las de un adulto.

Además, si el uso del ingreso per cápita es problemático para medir el bienestar, lo es aún más para medir la pobreza utilizando las líneas de pobreza (LP), pues lo que se pretende con ello es estimar el número de personas que no pueden satisfacer sus necesidades fundamentales con sus ingresos. En este caso es aún más relevante saber si el ingreso necesario para satisfacer las necesidades de un adulto o las de un niño es idéntico.

Lo que se busca al estimar escalas equivalentes es precisamente poder comparar hogares que tienen una composición demográfica diferente y, por tanto, necesidades diferentes. La escala equivalente es una medida que permite comparar las necesidades de hogares con diferentes estructuras de edad. La idea es estimar las necesidades de consumo de los adultos y de los niños, para encontrar la equivalencia en términos de adulto, por ello estas escalas se suelen presentar en términos de adulto equivalente.

En Colombia la necesidad de estudiar las escalas de equivalencia surge en ejercicios de medición de la pobreza absoluta, pues el método corriente simplemente compara el ingreso per cápita del hogar con la línea de pobreza, sin considerar las diferencias de edad entre sus miembros. Algunos trabajos han intentado resolver este problema haciendo estimaciones de adulto equivalente y de economías de escala en consumo (Lasso, 2002, y Muñoz, 2004). Muñoz presenta varios métodos para medir la equivalencia adulto, y si bien alguno de ellos produce resultados razonables, con otros los resultados son al menos contraintuitivos, quizá porque sus modelos de demanda no incluyen los precios.

Según Deaton y Muelbauer (1980b), la estimación de escalas de equivalencia (equivalencia adulto) se puede abordar de varias maneras: con estudios nutricionales y psicológicos, a través de votaciones o convenciones o con estudios empíricos del comportamiento del gasto de los hogares; esta última forma fue la que eligieron Muñoz y Lasso.

En el estudio de Muñoz los resultados contraintuitivos podrían reflejar la realidad o deberse a falencias del modelo, por ejemplo, la imposibilidad de identificar escalas de equivalencia a partir de fun-

ciones de demanda, ya que una misma función de demanda se puede obtener de diferentes funciones de gasto que representan actitudes distintas de los padres hacia los hijos y reglas de interacción muy diversas. También pueden obedecer a que no tiene en cuenta los precios, o a que en la ecuación de Engel no se incluyeron otras variables sociodemográficas relevantes.

Este trabajo busca mejorar las estimaciones de demanda, incluyendo los precios, con la esperanza de encontrar equivalencias adulto más razonables. Cabe recalcar la importancia de una buena estimación de las escalas de equivalencia en el diseño de políticas, porque ayuda a medir mejor la pobreza y a obtener mejores indicadores bienestar. En sus estimaciones, Muñoz parte del sistema de Working y Leser, un conjunto sencillo de ecuaciones de Engel de la forma:

$$W_i = a_i + B_i \ln(x) \quad (1)$$

donde  $w_i$  es la participación del gasto en el bien  $i$  en el gasto total y  $x$  el gasto total del hogar<sup>2</sup>. Este modelo se estima cuando se tiene información de corte transversal y supone que los precios son constantes. En sus ejercicios, Muñoz añade variables demográficas a la ecuación (1), que queda así:

$$W_i = a_i + B_i \ln(x/n) + d_i \ln(n) + \sum_j \gamma_{ij}(n_j) \quad (2)$$

donde  $n$  es el número de miembros del hogar y  $n_j$  el número de miembros de edad  $j$ .

Muñoz hizo sus estimaciones para tres grupos de edad: de 0 a 7 años, de 8 a 17 años y de 18 y más, y probó dos maneras de encontrar la relación adulto equivalente, una con el método de Engel, en el que se emplea la ecuación (2) para alimentos, y otra con el método de Rothbarth en el que se utiliza esa ecuación para bienes consumidos “exclusivamente por los adultos” (Muñoz, 2004, 46 y ss.). Los resultados varían mucho según el método, y uno de ellos puede parecer en principio contraintuitivo, porque el ingreso necesario para un niño de 0 a 7 años es mayor que el que requiere uno de 8 a 17. Cuando repitió ese ejercicio con datos de las ECV1997 y ECV2003 obtuvo resultados similares<sup>3</sup>.

Como comenta Perali sobre ese estudio de 2004, el trabajo y los ejercicios realizados con datos de las encuestas de calidad de vida presentan un problema: no tienen en cuenta características,

<sup>2</sup> En general se usa el gasto corriente, que aquí se define como el gasto en bienes de consumo no durable; excluye entonces la compra de vivienda y su amortización, de automóviles y de muebles.

<sup>3</sup> En Muñoz (2004) se usó información de la Encuesta de Ingresos y Gastos de 1994 y 1995.

como el sexo y la educación del jefe, la región y otras características socioeconómicas relevantes. Además, las ecuaciones tipo (1) y (2) pueden tener deficiencias por la falta de precios, ya que el supuesto de precios constantes no es adecuado, así la información utilizada sea de corte transversal<sup>4</sup>. En Atella et. al. (2003, 195) se cita a Slesnick: “La ausencia de información de precios en las encuestas crea problemas especiales para medir el bienestar social, la desigualdad y la pobreza”.

La teoría de la demanda indica que los factores más importantes para explicar el comportamiento del consumo son el ingreso y los precios; si estos últimos fuesen fijos podríamos obtener ecuaciones de Engel al estimar el gasto en cierto bien contra el ingreso. Eso es lo que se suele hacer cuando se usa información de corte transversal, pues supone que todos los hogares enfrentan los mismos precios, aunque no sea así pese a que la encuesta recoge datos de corte transversal. Esto no significa que se recojan al mismo tiempo, pero el tiempo transcurrido entre la primera y la última encuesta, por corto que sea, basta para que haya variación de precios; además, estos pueden variar espacialmente, es decir, ser diferentes según el sitio de compra aun dentro de una misma ciudad, y la heterogeneidad de los bienes puede llevar a que los hogares enfrenten diferentes precios. No tener en cuenta esas diferencias de precios puede llevar estimadores erróneos y, por tanto, a conclusiones erróneas.

Perali muestra que diversos autores han intentado remediar la falta de información de precios en las encuestas de hogares usando las series de índices de precios de las Cuentas Nacionales, pero las estimaciones así obtenidas no son muy buenas y, en general, son opuestas a lo que predice la teoría sobre elasticidades de demanda. También señala que algunas encuestas recogen datos de gastos y cantidades, lo que hace posible obtener precios implícitos (unidades de valor), y que si bien estos tienen problemas, como las diferencias de calidad de los productos o el grado de agregación de los bienes, a partir de esos precios se pueden obtener estimaciones más ajustadas de las funciones de demanda. Propone entonces un método para estimar las “unidades de valor”, basado en Lewbel (1989), cuando las encuestas no traen la información de cantidades, como la ECV2003. Después de calcular los precios implícitos se pueden hacer mejores estimaciones de las ecuaciones de demanda introduciendo variables demográficas de manera apropiada, como proponen Perali (2003) o

<sup>4</sup> Perali (2003) y Hoderlein y Mihaleva (2008) destacan los problemas de estimación causados por la ausencia de los precios.

Menon y Perali (2009). Su manera de introducirlas cumple ciertas propiedades deseables para hacer estimaciones de equivalencia adulto.

## EL MODELO

En esta sección se presenta la propuesta para estimar unidades de valor y se describe el sistema de demanda propuesto por Perali y Perali-Menon que parte del sistema cuasi ideal de ecuaciones de demanda AIDS (Almost Ideal Demand System).

### DERIVACIÓN DE UNIDADES DE VALOR EN AUSENCIA DE DATOS DE CANTIDADES

Lewbel (1989) propone un método para estimar la variabilidad de las unidades de valor en las encuestas de corte transversal, aprovechando la información demográfica incluida en ellas. Divide los gastos de los hogares en  $n$  grupos de bienes ( $i=1, \dots, n$ ) y cada grupo en subgrupos, de modo que cada grupo  $i$  contiene  $n_i$  subgrupos. Así, los grupos pueden ser alimentos, vestuario, etc., y el grupo de alimentos estar compuesto por cereales, frutas, etc., mientras que el de vestuario, por vestido para adultos hombres, adultos mujeres y niños.

En la notación de Lewbel (1989, 312),  $q_{ij}$  es la cantidad consumida del bien  $j$  que pertenece al grupo de bienes  $i$ , con  $i=1, \dots, n$  y  $j=1, \dots, n_i$ , y cada  $q_{ij}$  tiene asociado un precio  $p_{ij}$ . Para cada grupo  $i$ ,  $x_i = \sum_j p_{ij} q_{ij}$  se define como el gasto total en el grupo  $i$  y  $X = \sum_i x_i$  como el gasto total del hogar;  $w_{ij} = p_{ij} q_{ij} / x_i$  es la participación del gasto en el bien  $ij$  dentro del gasto total del grupo  $i$ , y  $w_i = x_i / X$  la participación del gasto en los bienes del grupo  $i$  dentro del gasto total.

La función de utilidad del hogar es  $U(q_i, a)$ , donde  $q_i$  es el vector de bienes del grupo  $i$  ( $i=1, \dots, n$ ) y  $a$  el vector de características demográficas del hogar. Para lo que sigue, Lewbel supone que la función de utilidad es débilmente separable, es decir:

$$U(q_i, a) = U(u_1(q_1, a), u_2(q_2, a), \dots, u_n(q_n, a)),$$

y define

$$M_i(q_i, a) = u_i(q_i, a^*) / u_i(q_i, a), \text{ para todo } i=1, \dots, n \quad (3)$$

donde  $a^*$  denota un hogar de referencia y  $M_i$  la escala de equivalencia para el grupo de bienes  $i$  con respecto al hogar de referencia.

Ahora bien, si  $U$  es homotéticamente separable, el consumo de bienes de cada grupo solo depende de los precios relativos de los bienes que componen el grupo y de  $a$ . La demanda de bienes del grupo  $i$  resulta de maximizar  $u_i(q_i, a)$  sujeta a  $p_{ij} q_{ij} = x_i$ .

Suponiendo que la función de utilidad de cada grupo de bienes  $i$  puede ser representada por una función Cobb-Douglas de la forma  $q_i^b q_2^{(1-b)}$  se obtiene la función de gastos

$$e(p, u) = u(p_1/b)^b (p_2/(1-b))^{(1-b)} \quad (4)$$

Se puede entonces establecer un índice de precios de los bienes del grupo  $i$ , entre un hogar y el hogar de referencia  $P_i = (p, u)/e(p, u^*)$ . En el caso de la función Cobb-Douglas,  $e(p, u)$  se puede expresar como  $e(p, u) = uv(p)$ , que es la forma de la expresión (4), y entonces

$$P_i = u_i(p_1/b)^b (p_2/(1-b))^{(1-b)} / u_i^*(p_1/b^*)^b (p_2/(1-b^*))^{(1-b)^*} \quad (5)$$

donde el asterisco denota el hogar de referencia. Reemplazando (3) en (5) se obtiene:

$$P_i = (p_1/b)^b (p_2/(1-b))^{(1-b)} / M_i (p_1/b^*)^b (p_2/(1-b^*))^{(1-b)^*} \quad (6)$$

$$M_i P_i = (p_1/b)^b (p_2/(1-b))^{(1-b)} / (p_1/b^*)^b (p_2/(1-b^*))^{(1-b)^*} \quad (7)$$

Sin pérdida de generalidad, se pueden igualar  $p_1=p_2=1$  y entonces:

$$M_i P_i = b^{-b} (1-b)^{(1-b)} / b^{*-b} (1-b^*)^{(1-b)^*} \quad (8)$$

La ecuación (8) se encuentra en Perali (2003, 202). Recordando que cuando la función de utilidad es Cobb-Douglas las participaciones presupuestales son  $w_1 = b$  y  $w_2 = 1 - b$ , (8) se puede reescribir así:

$$M_i P_i = w_1^{w_1} w_2^{w_2} / w_1^{*w_1^*} w_2^{*w_2^*} \quad (9)$$

Generalizando (9) se tiene que el índice de unidad de valor (pseudo índice, lo llama Perali) para cada grupo de bienes es:

$$P_i' = M_i P_i = \prod_{j=1}^{ni} w_{ij}^{-w_{ij}} / \prod_{j=1}^{ni} w_{ij}^{*-w_{ij}^*} \quad (10)$$

El pseudo índice  $P_i'$  se puede comparar con los índices de unidades de valor que se deducen cuando hay datos de cantidades, después de normalizar, tomando las unidades de valor de un hogar específico como numerario. Cabe señalar que si se supone que la función de utilidad de los bienes que componen cada grupo es Cobb-Douglas, nada se dice de la función de utilidad de los grandes grupos, y puede ser “arbitrariamente complicada” (Lewbel, 1989, 315).

Obsérvese que  $P_i'$  es un “pseudo” índice. Para expresarlo en niveles Perali propone transformar el pseudo índice de unidades de valor en un pseudo índice regional, multiplicando  $P'$  por los índices de precios regionales de cada subgrupo que vienen en las estadísticas de precios, lo que produce “pseudo” unidades de valor regionales. Y, después, pasar estos índices a niveles o precios nominales, para lo cual se multiplica

el índice de precios regionales por el valor promedio del gasto en cada grupo, por región.

#### EL SISTEMA DE DEMANDA DE PERALI Y PERALI-MENON

Cabe aclarar que si bien la función de utilidad usada en los bienes de cada grupo es Cobb-Douglas, la que se especifica para los grupos puede tomar otra forma. Esta aclaración es necesaria porque en el modelo de demanda se introducen variables demográficas pues el objetivo principal es calcular escalas de equivalencia.

Como ya se mencionó, una dificultad para estimar escalas de equivalencia es la imposibilidad de identificarlas a partir de preferencias dadas. Perali-Menon (2009) dan la siguiente definición:

*Problema fundamental de identificación de las escalas de equivalencia.* Las demandas condicionadas se pueden derivar de funciones de gasto del tipo  $C(u, p; r, d) = G(u, p, d)m(p, r, d)$ , donde  $m(p, r, d)$  puede mostrar comportamientos muy distintos. Así, diferentes escalas de equivalencia son consistentes con las mismas preferencias<sup>5</sup>. Esto implica que las comparaciones pueden cambiar arbitrariamente y que observar el comportamiento del consumidor no basta para sacar conclusiones de la comparación entre hogares. Sin embargo, estos autores afirman que el problema fundamental de identificación no implica que las escalas de equivalencia no se puedan estimar excepcionalmente, como se muestra enseguida. Y plantean las siguientes propiedades:

*Propiedad 1.* Independencia de la base (IB). La escala de equivalencia de un hogar o el índice de costos de las características es independiente de la elección del nivel de ingresos o de utilidad con el que se hacen las comparaciones interpersonales. Esta propiedad se conoce como exactitud de las escalas de equivalencia (ESE); las escalas de equivalencia son IB o ESE sí dependen de los precios y las características demográficas, pero no del nivel de ingreso elegido para hacer la comparación entre hogares.

Los autores mencionados añaden: “La propiedad IB permite recuperar, excepcionalmente, las escalas de equivalencia, pero no resuelve el problema fundamental de identificación de las escalas de equivalencia, porque no da información adicional sobre las preferencias no condicionales” (ibíd.).

<sup>5</sup> En la página 8 presentan la *Definición 1. Problema fundamental de identificación de las escalas de equivalencia.* Las mismas demandas condicionales  $q(p, y | r, d)$  se pueden derivar de la clase de funciones de costos  $C(u, p; r, d) = G(u, p, d)m(p, r, d)$ , donde  $G(u, p, d) = \min\{p \cdot q \mid \mathfrak{F}(U'(q | r, d), r, d) \geq u\}$  y  $\mathfrak{F}(u, r, d)$  es una función monótona en  $u$  tal que  $U(q, d, r) = \mathfrak{F}(U'(q | r, d), r, d)$ . Se sigue que diferentes escalas de equivalencia son consistentes con las mismas preferencias.



*Propiedad 2:* Independencia de la elección del hogar de referencia. La escala de equivalencia es independiente de la elección del hogar de referencia si la distribución del bienestar, que es la distribución del ingreso equivalente, puede ser ordenada con respecto a alguna otra distribución y este orden no cambia al cambiar el hogar de referencia.

La especificación del modelo de demanda que sigue cumple las dos propiedades anteriores, y es una ampliación del modelo cuasi ideal de ecuaciones de demanda especificado por Deaton y Muelbauer (1980a).

El AIDS es un sistema que pertenece a la familia de los sistemas de demanda llamados PIGLOG, ya que las participaciones del gasto,  $w$ , son afines al logaritmo del ingreso (gasto total) y pertenecen a la subclase de los Price Independent Generalized Linear, estas preferencias son representadas vía función de gastos:

$$\ln C(u, p) = \ln A(p) + B(p)u \quad (11)$$

$$\text{Con } \ln A(p) = \alpha_0 + \sum \alpha_k \ln p_k + (1/2) \sum_k \sum_j \gamma_{kj}^* \ln p_k \ln p_j \quad (12)$$

$$\text{y } B(p) = B_0 \prod p_i^{B_i} \quad (13)$$

Derivando (11) con respecto al logaritmo natural de  $p_i$  se obtiene  $w_i$ :

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + B_i u B_0 \prod p_k^{B_k}, \text{ con } \gamma_{kj} = 0,5(\gamma_{jk}^* \gamma_{kj}^*)$$

Despejando  $u$  de (11) se obtiene:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + B_i (\ln X - (\alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + (1/2) \sum_k \sum_j \gamma_{kj}^* \ln p_k \ln p_j)) \quad (14)$$

donde  $X$  es el gasto total.

La propiedad de agotamiento del gasto se cumple si  $\sum_i \alpha_i = 1$ ,  $\sum_j \gamma_{ij} = 0$ ,  $\sum_i B_i = 0$ , la de homogeneidad requiere que  $\sum_j \gamma_{ij} = 0$  y la de simetría, que  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  (Deaton y Muelbauer, 1980a, 76). La condición de agotamiento del gasto se cumple automáticamente en general y por ello no es contrastable; las otras dos propiedades sí son contrastables.

Perali (2003) y Pizzo (2009) mencionan a varios autores que sugieren y definen un sistema cuadrático cuasi ideal de ecuaciones de demanda, al que presentan como un mejoramiento del AIDS porque algunos grupos de bienes requieren el término cuadrático del logaritmo del gasto a fin de obtener un mejor ajuste de la curvas de Engel. Banks, Blundell y Lewbel (1997) definen el sistema QAIDS, donde las ecuaciones de demanda se pueden derivar de la siguiente función de gastos con preferencias PIGLOG:

$$\ln C(u, p) = \ln a(p) + ub(p)/(1 - u\lambda(p)) \quad (15)$$

donde  $\ln a(p) = (\alpha_0 + \sum \alpha_i \ln p_i + 1/2) \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln p_i \ln p_j$ ,  $b(p) = \prod p_i^{B_i}$  y  $\lambda(p) = \sum \lambda_i \ln p_i$ , con  $\sum \lambda_i = 0$

Derivando (15) con respecto a  $\ln p_i$ , se obtiene:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \lambda_{ij} \ln p_j + (u B_i b(p)(1 - u \lambda(p)) + u^2 b(p) \lambda_i) / (1 - u \lambda(p))^2.$$

De (15) también se despeja la utilidad indirecta:

$$u = (\ln x - \ln a(p)) / (\lambda(p)(\ln x - \ln p) + b(p));$$

así obtenemos la ecuación típica de participación del gasto  $i$  del QAIDS:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \lambda_{ij} \ln p_j + B_i (\ln x - \ln a(p)) + \lambda_i / b(p) (\ln x - \ln a(p))^2.$$

### **Introducción de variables demográficas**

Para introducir las variables demográficas se debe modificar el QUAIDS, de modo que el sistema resultante sea compatible con las propiedades de las funciones de demanda y cumpla las propiedades IB y de independencia del hogar de referencia escogido. Perali (2003) señala que es deseable, en general, que las modificaciones demográficas del sistema de demanda actúen escalando y trasladando las funciones del sistema. Se refiere a las modificaciones de escala y traslado como modificaciones de Barten-Gorman<sup>6</sup> que son una transformación afín del sistema original. Perali (2003, 4) menciona una manera de expresar este tipo de transformaciones en la ecuación (1):

$$w_i(y, p, d) = t_i(d) + s(d)w_i(y(p, d), p, d)$$

donde  $t_i(d)$  es la función de translación,  $s(d)$  la función de escalamiento de  $w_i$  y  $d$  el vector de variables sociodemográficas. La especificación Barten-Gorman traslada la línea de presupuesto a través de un elemento de costo fijo y rota la restricción presupuestal modificando los precios efectivos con relación al efecto sustitución vía características demográficas (escalamiento) (Perali, 2003, 4).

Sean  $m(d)$  las funciones de escalonamiento de los precios que miden el efecto sobre la utilidad de los factores demográficos.

$$p_i^* = p_i m_i, \text{ precios de Barten}$$

$$q_i^* = q_i / m_i, \text{ cantidades de Barten, un caso especial de cantidades modificadas}$$

$$q_i^* = g_i(q, d) \text{ y } p_i^* = h_i(p, d) = p_i m_i(d)$$

Si suponemos que  $q^*$ , de la cual se deriva la utilidad, tiene el mismo precio que  $q$  (Gorman, 1976),  $q$  se traslada usando una función demográfica  $t(d)$ ;  $q^* = q + t(d)$ , y se tiene  $\text{Max } U(q^*)$ , sujeta a  $p q^* = y^* = p q - p t(d) = y - p t(d)$ . El término de translación  $t$  es un vector de cantidades requeridas asociado a un nivel mínimo de utilidad necesaria.

<sup>6</sup> La idea de escalar el sistema es de Barten (1964), y la de trasladarlo, de Gorman (1976).

Lewbel (Perali, 2003, 6 y 7) toma la función de gastos subyacente de Gorman y la generaliza:

$$y = c(u, p, d) = f(c^*(u, b(p, d)), p, d) \text{ si } y^* = c^*(u, b(p, d)) \quad (16)$$

es la función de gastos a los precios escalados  $p_i^* = b_i(p, d)$ .

La generalización de Lewbel hace posible una gran cantidad de modificaciones en la interacción entre los efectos demográficos y el gasto, a través de las funciones  $f$  y  $b$ . Retomando la expresión (16):

$$y = c(u, p, d) = f(y^*) = f(c^*(u, b(p, d)), p, d), \text{ con } c^*(u, b(p, d)) = c^*(u, p^*)$$

Derivando  $\ln c(u, p, d)$  con respecto al logaritmo natural de  $p_i$ :

$$w_i = \delta \ln C / \delta \ln p_i = \delta \ln f / \delta \ln y^* \ln y^* / \delta \ln b_i \delta \ln b_i / \delta \ln p_i + \delta \ln f / \delta \ln p_i = \\ \delta f / \delta y^* (y^*/y) \ln y^* / \delta b_i (b_i/y) \delta b_i / \delta p_i (p_i/b_i) + \delta f / \delta p_i p_i/y$$

Si  $w_i^* = \delta \ln y^* / \delta \ln p_i^*$ ,  $w_i$  queda así:

$$w_i = \delta f / \delta y^* (y^*/y) w_i^* (y^*, p^*) \delta b_i / \delta p_i (p_i/b_i) + \delta f / \delta p_i p_i/y \quad (17)$$

El término de translación  $T_i(y, p, d) = \delta f / \delta p_i p_i/y = \delta \ln f / \delta \ln p_i$

Para definir la función de escalamiento, tomando (17) hacemos:

$$S(y, p, d) = 1 - \sum_i T_i(y, p, d) = 1 - \sum_i \delta \ln f / \delta \ln p_i = \sum_i \delta f / \delta y^* y^*/y \delta b_i / \delta p_i p_i/b_i w_i^*(y^*, p^*)$$

Perali llega así a una forma general modificada del sistema de demanda, en forma de participaciones  $w$ , transformando el sistema original  $w^*$ :

$$w_i(y, p, d) = S(y, p, d) w_i^*(y^*, p^*) + T_i(y, p, d)$$

### **Introducción de variables demográficas en el QUAIDS**

Aquí se muestra cómo se introducen las variables demográficas en el sistema QUAIDS, el que se estima en este trabajo. Al introducir la función de translación y escalamiento (Perali, 2003, caps. 1.3 y 1.7), la ecuación de gastos se transforma en:

$$\ln C(u, p, d) = \ln A(p, d) + \phi(u) B(p, d) / (1 - \phi(u) \lambda(p, d)) + \ln P$$

donde

$$\ln A(p, d) = \alpha_0 + \sum \alpha_i \ln p_i^* + (1/2) \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln p_i^* \ln p_j^* \quad (18)$$

$$\text{y } B(p, d) = \Pi(p_i^*)^{B_i}$$

Con  $p_i^* = p_i m_i(d)$ ,  $m_i(d) = \Pi_r d_r^{\delta_{ir}}$  para  $r=1, \dots, R$  y  $\ln P = \sum_i t_i(d) \ln p_i^*$

siendo  $t(d)$  las funciones demográficas de traslación y  $m(d)$  las funciones demográficas de escalamiento<sup>7</sup>.

La ecuación típica de participación en el gasto  $w_i$  es la siguiente:

- a) Escalamiento:  $w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j^* + B_j \ln(y/A(p, d)) + (\lambda_i/B(p))(\ln(y/A(p, d)))^2$   
 b) Traslación:  $w_i = \alpha_i + t_i(d) + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + B_j \ln(y^*/A(p, d)) + (\lambda_i/B(p))(\ln(y^*/A(p, d)))^2$ ,  
 siendo  $\ln y^* = \ln y - \ln P$ .

En la ecuación de traslación  $\ln A(p, d) = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \ln p_i + (1/2) \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln p_i \ln p_j$ , lo que es diferente a (18) porque los precios no han sido escalados.

Para que se mantenga la homogeneidad de grado 1 de la función de gastos es necesario que  $\sum_i t_i(d) = 0$  (proposición 1.1 de Perali, 2003, 18).

La escala de equivalencia se puede escribir como:

$$EE = C(u, p, d^1)/C(u, p, d^0) = P(p, d^1)/P(p, d^0) \quad (19)$$

que solo depende de los precios y de las características demográficas; por tanto, EE cumple la propiedad IB.

## METODOLOGÍA

En esta sección se explican la metodología general que se usó para hacer los ejercicios, los problemas que se presentaron y la manera de resolverlos. En la primera parte se expone el método de estimación de precios de Lewbel y en la siguiente, todo lo referente a la estimación del modelo.

### ESTIMACIÓN DE PRECIOS DE LEWBEL

Ya se mencionó que para estimar los precios se siguen varios pasos: 1) estimar los “pseudo” índices de precios implícitos o de unidades de valor, 2) calcular los “pseudo” índices regionales, aplicando al “pseudo” índice de unidades de valor los índices de precios de cada subgrupo por cada región (índices de precios del DANE de los departamentos) y 3) pasar esos índices a niveles o precios nominales.

#### *Los “pseudo” índices de unidades de valor*

Recordemos la expresión (10):

$$P_i^* = M_i P_i = \prod_{j=1}^n w_{ij}^{-w_{ij}} / \prod_{j=1}^n w_{ij}^{*w_{ij}}$$

donde  $w_{ij}$  es la participación del gasto del bien  $j$  en el grupo  $i$ . El cálculo de esta expresión es exigente en información pues requiere para cada hogar un gasto diferente de 0 en cada subgrupo  $ij$ .

<sup>7</sup> Aquí se estima la traslación y no el escalamiento; por tanto,  $A(p, d) = A(P)$  y  $p^* = p$ .

El siguiente paso es clasificar los bienes y servicios de modo que los grupos sean los más adecuados para calcular los índices de precios. Inicialmente se hizo una agrupación que se consideró ideal para este ejercicio, pero esa clasificación no correspondía a la agrupación que hace el DANE de los productos del IPC, y tuvo que adaptarse a la del DANE, lo que llevó a una segunda agrupación. Infortunadamente, tampoco fue posible aplicar esta clasificación por falta de información, como se explica a continuación<sup>8</sup>.

Para ilustrar el problema consideremos el siguiente ejemplo: en alimentos hay 9 subgrupos; en muchos hogares, el gasto en los bienes que los conforman era 0 o no informaron; la encuesta da la posibilidad de que no den información artículo por artículo, sino que incluyan todos los bienes en un solo rubro, como alimentos varios, y así hicieron numerosos hogares. Otro ejemplo similar es el del vestuario; en este caso la mayoría de los hogares declaró no haber comprado esos artículos en el período de referencia. Se observa, entonces, que muchos hogares no compran ciertos bienes en el periodo de referencia (lo que no quiere decir que no los consuman), o no recuerdan en detalle las compras realizadas o se abstienen de dar la información.

Cuadro 1

<b>1. Alimentos</b>	Arveja verde, frijol verde, zanahoria, tomate
<i>Harinas y cereales</i>	Fríjol, arveja, lenteja y otras leguminosas Plátanos y tubérculos
Pan y arepa	Papas y otros tubérculos
Arroz, pastas, otras harinas y cereales	Plátanos
Galletas de sal y de dulce	<i>Alimentos varios y grasas</i>
<i>Leche y huevos</i>	Aceite, margarina y otras grasas
Leche y derivados	Azúcar, sal condimentos y salsas
Huevos	Enlatados, arvejas, atún
<i>Carnes</i>	Gaseosas
Carne de res y de cerdo	Dulces, chitos y otros pasabocas
Pollo	Agua embotellada
Pescado	Panela, café, chocolate
Salchicha, jamón	Alimentos varios
<i>Frutas, hortalizas y leguminosas</i>	Comida fuera del hogar
Bananos, naranjas, guayabas y otras frutas	
<b>2. Vivienda</b>	<i>Otros servicios de la vivienda</i>
<i>Arrendamientos</i>	Celular
Arrendamientos	Radioteléfono
Imputación del arriendo	Administración y celaduría
<i>Servicios públicos y combustibles</i>	Servicio doméstico de por días
Acueducto	Servicio doméstico interno
Alcantarillado	Artículos de aseo del hogar
Combustibles	Bombillos, pilas
Recolección de basuras	Cuota extraordinaria de administración
Electricidad	<i>Enseres</i>
Teléfono fijo	Colchones, cobijas, manteles, sábanas
	Ollas, vajillas, cubiertos y utensilios

<sup>8</sup> La clasificación inicial y la adaptada al IPC se muestran en el anexo.

<b>3. Salud</b> <i>Hospitalización y seguros de hospitalización</i> Hospitalización Pago de atención en salud Seguros de salud <i>Bienes y servicios de salud</i> Elementos de botiquín Pagos de fórmula médica	4. Transporte terrestre <i>Automóvil particular</i> Combustible Parquedero Reparación y mantenimiento <i>Transporte público</i> Transporte urbano e intermunicipal terrestre
<b>5. Educación, recreación y cultura</b> <i>Artículos de recreación y culturales</i> Periódicos y revistas Libros, discos, CD Cuadros y obras de arte Mascotas y su sostenimiento <i>Servicios de esparcimiento</i> Servicios de TV cable, satelital, etc. Diversiones y entretenimiento Hoteles	<i>Instrucción</i> Bonos escolares Matrícula Pensión <i>Artículos para la educación</i> Alimentación escolar Libros y útiles escolares Transporte escolar Otros educación Uniformes
<b>6. Servicios personales y otros bienes</b> <i>Cuidado personal</i> Artículos de aseo personal Lustrada de calzado Servicio de lavandería Corte de pelo Anillos, relojes, joyas <i>Bebidas, tabaco, fósforos y apuestas</i> Bebidas alcohólicas Tabaco Fósforos y encendedores Apuestas y loterías <i>Vestuario calzado y su reparación</i>	Ropa para personas del hogar Medias de mujer Tela para vestuario Calzado Reparación del vestuario y del calzado <i>Transporte aéreo y correo</i> Pasajes de avión Correo, fax, encomiendas Pago por Internet <i>Otros bienes</i> Pagos de tarjeta de crédito Seguros de vida, vivienda y vehículo Transferencia a otros hogares

Este problema dificulta el uso del método de Lewbel ya que la información requerida por (10) es muy exigente; es cierto que se pueden imputar algunos  $w_{ij}$ , pero cuando muchas observaciones tienen este problema, la imputación carece de sentido. Para el ejercicio que aquí se muestra se decidió agregar bienes y reducir el número de grupos y subgrupos. El cuadro 1 muestra los grupos y subgrupos que se conformaron.

Al final quedaron seis grupos; educación se agregó a recreación y cultura para formar un grupo, y gastos varios a vestuario. Si bien no es la mejor agrupación, sobre todo si se supone que cada grupo es homotéticamente separable, dada la limitación de información es la mejor clasificación posible.

Recordando de nuevo la ecuación (10):

$$P_i' = M_i P_i = \prod_{j=1}^{ni} w_{ij}^{-w_{ij}} / \prod_{j=1}^{ni} w_{ij}^{*w_{ij}}$$

Los  $w_{ij}^*$ , los valores del hogar de referencia que se tomaron para el ejercicio, fueron los promedios de la muestra, tal como hacen Perali (2003) y Holderlein (2008), es decir, el promedio del gasto en cada subgrupo.

### *De los pseudo índices de unidades de valor a los precios nominales*

También fue necesario transformar la información del IPC del DANE, para ajustarla a la agrupación final. Donde hubo mayor dificultad fue en la conformación del grupo 6, pero esta información del DANE trae las ponderaciones y se pudo elaborar el índice de precios para transformar los pseudo índices de valor en pseudo índices regionales.

$$IPLR_i = P_i^* IPR_i$$

Es decir, el pseudo índice de precios regional (IPLRI, por Lewbel), es igual al pseudo índice de las unidades de valor del grupo  $i$  por el índice de precios regional del grupo  $i$ , estimado a partir del IPC del DANE. El IPC del DANE es a nivel de ciudad, entonces se hizo la siguiente equivalencia:

Ciudades del IPC que se hicieron corresponder a las regiones ECV2003

Ciudades de IPC	Regiones ECV2003
Bogotá	Bogotá
Medellín	Antioquia
Cali	Valle
Pasto	Pacífica
Barranquilla	Atlántica
Bucaramanga	Oriental
Manizales	Central
Cartagena	San Andrés
Villavicencio	Orinoquia

Una vez calculados los pseudo índices de precios regionales se calculan los precios nominales o niveles, multiplicando esos pseudo índices por el gasto medio de cada grupo por quintil de gastos y región.

$$PFINAL_i = IPGR_i * GMED_i$$

### ESTIMACIONES ECONOMETRICAS

En este apartado se muestra cómo se estimó el QUAIDS incluyendo las variables demográficas. La ecuación típica del modelo es:

$$w_i = \alpha_i + t_i(d) + \sum_i \gamma_{ij} \ln p_j + B_j \ln(x^*/A(p, d)) + d_i (\ln(x^*/A(p, d)))^2 \quad (20)$$

donde

$$A(p, d) = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \ln p_i + (1/2) \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln p_i \ln p_j$$

$$d_i = \lambda_i / B(p), \ln x^* = \ln x - \ln P^* \text{ y } \ln P^* = \sum_i t_i(d) \ln p_i$$

siendo  $t(d)$  las variables sociodemográficas.

Se tomaron los hogares donde había una sola unidad de gasto<sup>9</sup>. Variables sociodemográficas incluidas en el modelo: las personas se dividieron en tres grupos de edad, de 0 a 7 años, de 8 a 17 años y de 18 y más años. Además, se incluyeron las siguientes variables *dummy*: zona (urbano-rural), nueve regiones (Antioquia, Atlántica, Bogotá, Oriental, Central, Pacífica, Valle, San Andrés y Orinoquia; Bogotá como referencia), sexo del jefe (hombre 1) y ocho tipos de actividad económica (las cinco primeras para los ocupados, según su posición ocupacional: empleados, que se toma de referencia, obreros, empleados domésticos, independientes y patronos; y las tres últimas para los no ocupados: desempleados, pensionados e inactivos no pensionados)<sup>10</sup>; una *dummy* de valor 1 cuando el cónyuge recibe ingresos. Además, se introdujeron la edad del jefe del hogar y sus años de educación.

Este modelo se estimó para los seis grupos de bienes con el método ITSUR<sup>11</sup>, donde  $A(p, d)$  se estima dentro del modelo y no en forma exógena<sup>12</sup>, por ello no se pueden estimar las ecuaciones una a una por MCO, sino por métodos no lineales. En la estimación se impusieron las restricciones de homogeneidad y simetría, y la única propiedad que se puede poner a prueba es la negatividad de la matriz de Slutsky<sup>13</sup>, pues la de agotamiento siempre se cumple en este modelo<sup>14</sup>. Esto implica, entonces, que  $\sum_i \gamma_{ij} = 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$ ,  $\sum \beta_i = 0$  y  $\sum \lambda_i = 0$ , por la propiedad de agotamiento del gasto.

$\sum_{\varphi} \gamma_{ij} = 0$  para todo  $i$ , por la propiedad de homogeneidad, y para que se cumpla la propiedad de simetría de la matriz de Slutsky se impone que  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ . Por último, para mantener la homogeneidad de grado 1 de la función de gastos se impone que  $\sum_i f_i(d) = 0$ .

<sup>9</sup> La unidad de gasto está formada por los miembros del hogar que deciden o son tomados en cuenta en las principales decisiones de gasto; así, el servicio doméstico que reside en el hogar y sus hijos, igual que los pensionistas, son miembros del hogar pero forman otras unidades de gasto.

<sup>10</sup> La encuesta clasifica a los ocupados en empleados y obreros del gobierno, empleados y obreros de empresa particular, empleados domésticos, independientes y patronos. Aquí no se diferencia entre ocupados por el gobierno o por empresas particulares, sino entre obreros y empleados; la categoría de empleados y obreros del gobierno se unió a la correspondiente a empresa particular, y esta unión se dividió en dos grupos usando la clasificación de ocupaciones (CO) del DANE: empleados para aquellos cuyo código en la CO es menor de 62 y obreros si es mayor de 62.

<sup>11</sup> Estimación iterativa de ecuaciones aparentemente no relacionadas.

<sup>12</sup> Deaton y Muelbauer (1980a) proponen que  $A(p, d)$ , que en realidad es un índice de precios, se calcule exógenamente, por ejemplo, usando el índice de Stone:  $\ln P = \sum \omega_k \ln p_k$ . Sin embargo, Pashardes muestra que los estimadores encontrados usando el índice de Stone son sesgados.

<sup>13</sup> Para las propiedades de las funciones de demanda, ver Deaton (1980a), Varian (1992) o Muñoz (2004).

<sup>14</sup> Por ello no se estima la ecuación de servicios personales y otros bienes.



### *Elasticidades precios e ingreso (gasto)*

Desde que se empezaron a estimar diferentes modelos de demanda, uno de los aspectos de mayor interés para los economistas es obtener información acerca de cómo responde la demanda a cambios de precios e ingresos, es decir, conocer las elasticidades de demanda con respecto a estas variables. Aquí se presentan las fórmulas utilizadas para calcular la elasticidad gasto y las elasticidades precio propio y cruzadas de la demanda marshallianas y hicksianas.

Como las ecuaciones se presentan en forma de participación, para deducir las elasticidades se usaron las siguientes expresiones:

Elasticidad gasto:  $\eta_i = (\delta w_i / \delta X) X / \tau_i + 1$

Elasticidad precio propio marshalliana:  $\eta_{ii} = (\delta w_i / \delta p_i) p_i / \tau_i - 1$

Elasticidad precio cruzada marshalliana:  $\eta_{ij} = (\delta w_i / \delta p_j) p_j / \tau_i$

Elasticidad precio propio hicksiana:  $\varepsilon_{ii} = \eta_{ii} + \tau_i \eta_i$

Elasticidad precio cruzada hicksiana:  $\varepsilon_{ij} = \eta_{ij} + \tau_j \eta_i$

De (20) deducimos estas elasticidades:

$$\eta_i = (1/\tau_i)(\beta_i + 2d_i(\ln X^* - \ln A(p))) + 1 \quad (21)$$

$$\eta_{ii} = (1/\tau_i)(\gamma_{ii} - (B_i + 2d_i(\ln x^* - \ln A(p))))(\tau_i - B_i(\ln x^* - \ln A(p)) - d_i(\ln x^* - \ln A(p))^2) - 1$$

$$\eta_{ij} = (1/\tau_i)(\gamma_{ij} - (B_i + 2d_i(\ln x^* - \ln A(p))))(\tau_j - d_j(\ln x^* - \ln A(p))^2)$$

## RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados de los ejercicios, empezando por los precios de Lewbel; luego los de las estimaciones del QAIDS y las elasticidades en el punto medio; y, por último, una interpretación de los resultados para calcular las escalas de equivalencia.

### PRECIOS DE LEWBEL

Recordemos que lo primero que se obtiene es el índice de valor a partir de  $P_i^v = \prod_{j=1}^n \tau_{ij}^{-w_{ij}} / \prod_{j=1}^n \tau_{ij}^{-w_{ij}^*}$ .

Este índice se multiplica por los índices de precios regionales para cada subgrupo (que vienen en el IPC) y produce pseudo unidades de valor regionales. Estos índices se deben transformar en niveles o precios nominales, para lo cual se multiplican los índices de precios regionales por el valor promedio del gasto en cada grupo, por región. El cuadro 2 muestra los precios medios resultantes, los finales o precios nominales y los índices de unidades de valor regionales.

Cuadro 2  
Precios de Lewbel

Precios	Precios de nivel		Índices regionales	
	Nominales	Relativos	Pseudo índice	Alimentos=1
Alimentos	105.952,0	1,00	1,4157	1,00
Vivienda	509.168,7	4,81	1,2225	0,86
Salud	43.685,9	0,41	1,1833	0,84
Transporte	4.099,1	0,04	1,0950	0,77
Educación	177.642,3	1,68	1,3092	0,92
Servicios	282.452,4	2,67	1,4928	1,05

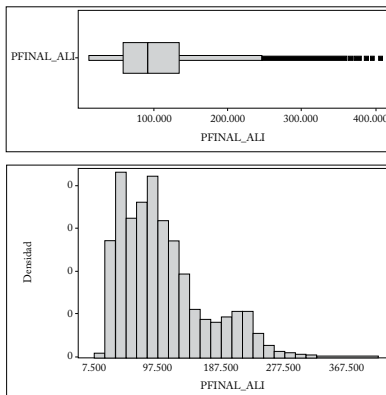
Para evaluar los resultados de precios se tienen en cuenta tres aspectos: que los precios relativos sean razonables, la variabilidad de los precios y la correlación con los precios de otros bienes; en este último caso lo deseable es que sean lo menos correlacionados posible.

Al analizar los precios nominales se debe tener en cuenta que se calcularon como la multiplicación del gasto promedio por cada grupo de bienes, por quintil de gastos y región, lo cual da un precio promedio para cada grupo de bienes.

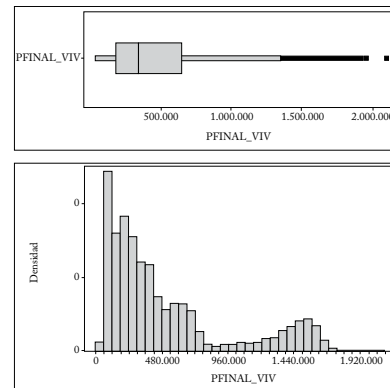
El mismo cuadro presenta las medias de los pseudo índices de precios regionales, es decir, obtenidos al multiplicar los pseudo índices de los hogares por los índices de precios regionales; estos se utilizaron también en los ejercicios econométricos; pero como se observa en el cuadro los precios relativos obtenidos con estos índices son menos razonables: alimentos más caros que vivienda, educación y servicios.

Las gráficas 1 a 6 muestran la variabilidad de los precios nominales; los precios con más variabilidad son los de los cuatro últimos grupos, debido a que en cada uno de esos grupos se incluyeron bienes más heterogéneos: las gráficas 7 a 12 muestran la variabilidad de los precios regionales que, como se observa, es mucho menor.

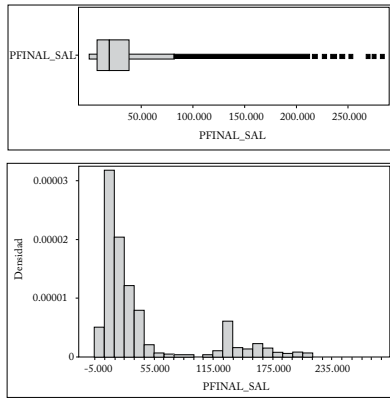
Gráfica 1



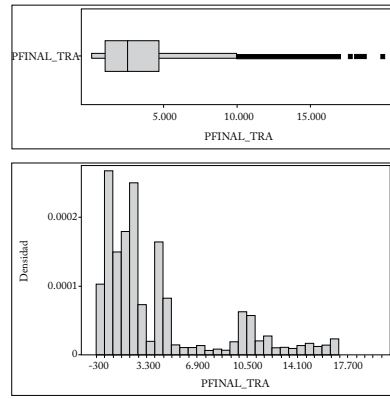
Gráfica 2



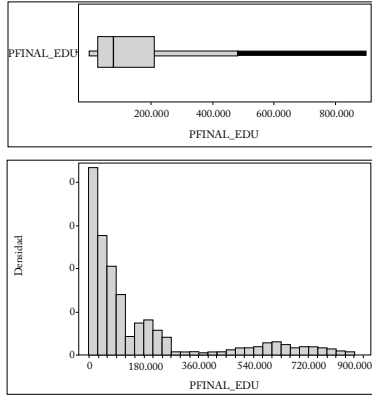
Gráfica 3



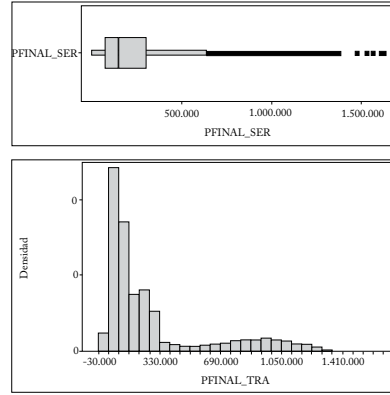
Gráfica 4



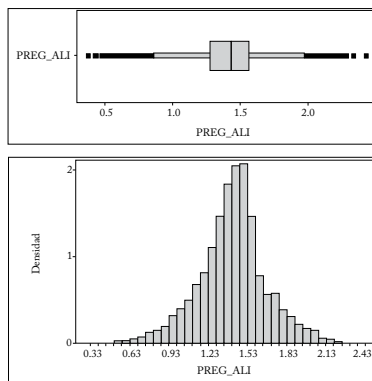
Gráfica 5



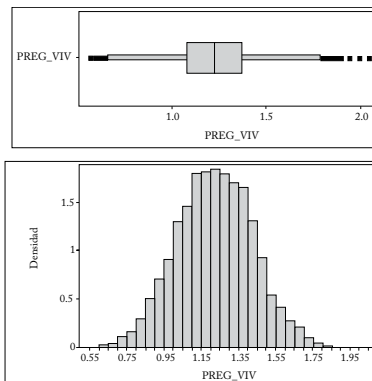
Gráfica 6



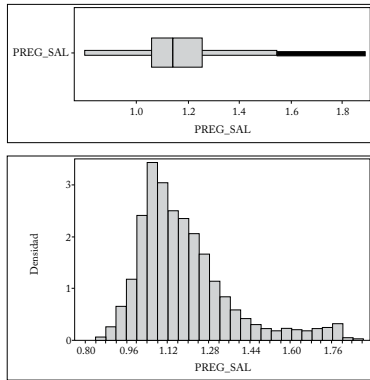
Gráfica 7



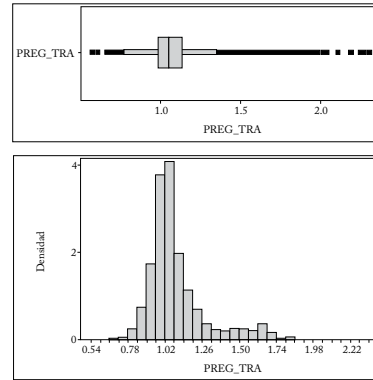
Gráfica 8



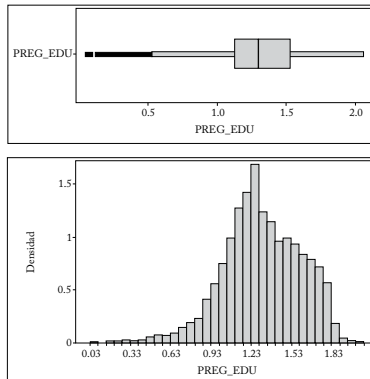
Gráfica 9



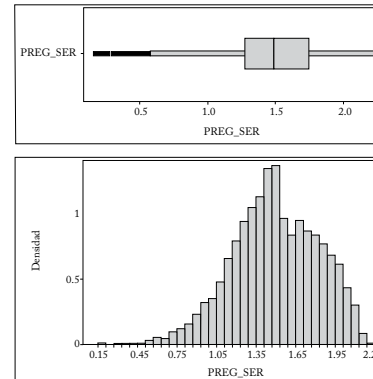
Gráfica 10



Gráfica 11



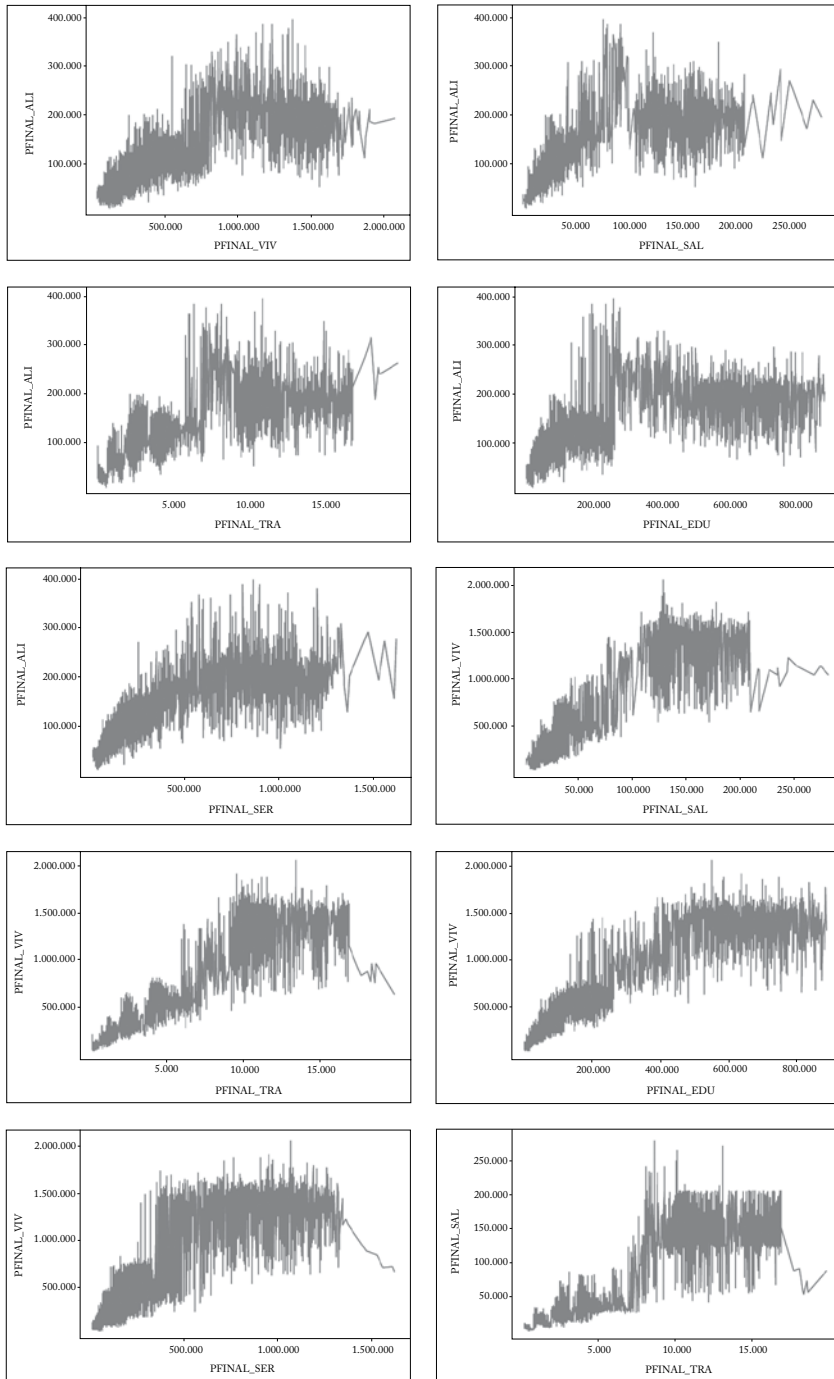
Gráfica 12



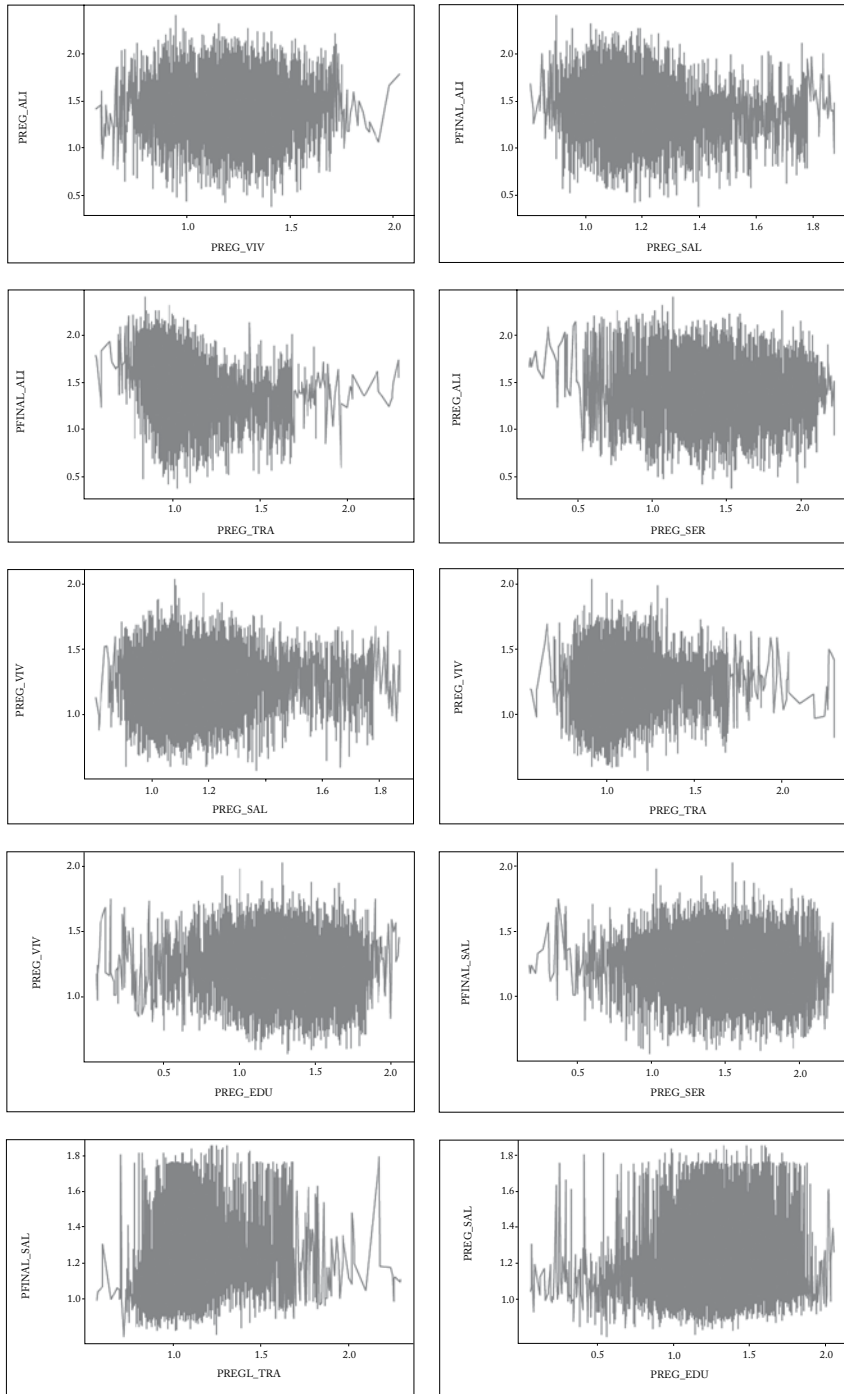
En la gráfica 13 se presenta la correlación de algunos precios nominales entre los grupos; se observa una correlación positiva entre ellos, en especial cuando los niveles de precios son bajos, ya que a partir de cierto nivel, la correlación disminuye. Este comportamiento es similar en todos los productos. En cambio, los precios regionales (gráfica 14) no presentan correlaciones, por lo cual se puede concluir que la correlación se presenta en la última etapa de la estimación de precios, cuando los pseudo índices regionales se multiplican por el gasto promedio.

Por último, cuando se estimó el modelo de demanda se obtuvieron elasticidades precio muy altas con los precios regionales, por ello se optó por usar los precios nominales; además, estos últimos son teóricamente más correctos (Perali, 2003).

Gráfica 13



Gráfica 14



## ESTIMACIÓN DEL MODELO

El anexo 2 muestra los resultados de la estimación del QUAIDS con precios de Lewbel. Lo primero que se debe decir es que los coeficientes de determinación son relativamente altos, ya que con la sola curva de Engel no llegaban al 20%. Por otro lado, a pesar de la gran cantidad de variables incluidas, la mayoría son estadísticamente significativas, como se observa en el cuadro 3; tan solo en educación, cultura y esparcimiento los coeficientes de gasto y el gasto al cuadrado no resultan significativamente diferentes de 0. La participación del gasto en alimentos y en transporte crece con el gasto, pero ese crecimiento es cada vez menor, pues el parámetro asociado con el cuadrado del logaritmo del gasto es negativo y significativo; en vivienda la participación disminuye con el logaritmo del gasto pero aumenta con el cuadrado del logaritmo; en salud el parámetro asociado al cuadrado del logaritmo es positivo y significativo.

Cuadro 3  
Significancia de las variables incluidas en el QUAIDS

Parámetro asociado a	Ecuaciones					
	Alimentos	Servicios de la vivienda	Salud	Transporte urbano	Educación y esparcimiento	Servicios personales y otros bienes
Gasto	Sí	Sí	No	Sí	No	
Gasto al cuadrado	Sí	Sí	Sí	Sí	No	
Precio alimentos	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Precio vivienda	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Precio salud	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Precio transporte	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Precio educ. y recr.	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Precio serv. pers.	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Niños de 0 a 7 años	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Niños de 8 a 17 años	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
De 18 y más años	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Zona urbana	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Atlántica	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Oriental	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Central	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Pacífica	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Antioquia	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Valle	Sí	Sí	No	No	Sí	Sí
San Andrés	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Orinoquia	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Sexo Jefe	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Edad Jefe	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Educación jefe	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Jefe pensionado	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Jefe obrero	Sí	No	No	No	Sí	No
Jefe empl. doméstico	No	No	No	Sí	No	No
Jefe independiente	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Jefe patrón	Sí	Sí	No	No	Sí	Sí
Jefe desempleado	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí
Jefe inactivo	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí
Cónyuge perceptor	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

En cuanto a los parámetros de precios, solo hay dos no significativos: alimentos-salud y educación-transporte.

La interpretación de los resultados de los parámetros asociados a gasto y precios tiene más sentido económico en términos de elasticidades, de las que se habla más adelante.

Por su parte, la mayoría de los parámetros asociados a las variables socioeconómicas son estadística y significativamente diferentes de 0. Los asociados con edades son los que sirven para calcular las escalas de equivalencia. En las demás variables socioeconómicas se destaca la de zona, que es significativa para todos los bienes, salvo en transportes; en la zona urbana la participación del gasto en alimentos es, en promedio, un 8% menor que en la zona rural, mientras que en vivienda es un 8,9% mayor; en otros grupos las participaciones promedio son diferentes, pero es en estos dos grupos de bienes donde las diferencias son más importantes.

En el caso de las regiones –Bogotá es la región de referencia– se observan grandes diferencias en el patrón de consumo: la participación del gasto en alimentos es siempre mayor que en Bogotá, y esta mayor participación se compensa en todos los casos con una menor participación del gasto en vivienda, transporte y educación y esparcimiento. En salud, solo en tres de las ocho regiones consideradas la proporción del gasto en salud es menor que en Bogotá: Central, San Andrés y Orinoquia, en las demás la diferencia no es significativa. La participación de servicios personales es mayor en todas las regiones, de nuevo con respecto a Bogotá.

La estructura del gasto también cambia según si la jefatura del hogar la ejerce un hombre o una mujer. En un hogar con jefe masculino la proporción del gasto en alimentos, educación y servicios personales es mayor que en los hogares con jefatura femenina, mientras que en estos últimos es mayor la participación en salud y servicios de la vivienda. La edad del jefe del hogar y su nivel educativo influyen asimismo en la estructura de gasto: la participación en el gasto aumenta con la edad del jefe en servicios de la vivienda y salud. En educación se observa que mayores niveles educativos están asociados con una mayor participación del gasto en vivienda, salud, educación y servicios personales, a costa del grupo de alimentos.

En cuanto a la actividad económica del jefe, recordando que la categoría de referencia es la de empleados, resulta que en algunas actividades la estructura de gastos difiere significativamente de la de hogares con jefe empleado; en hogares con jefe pensionado, independiente, patrón, desempleado e inactivo. La participación del gasto en



alimentos es menor en los hogares con jefe patrón y jefes inactivos, mientras que servicios de la vivienda es mayor en hogares con jefe independiente, patrón, desempleado o inactivo. La proporción del gasto en salud es mayor en hogares cuyo jefe es pensionado, y menor en hogares con jefe independiente. La proporción del gasto en transporte es menor en hogares con jefe pensionado, desempleado o inactivo. En educación, su participación es menor en hogares con jefe pensionado o independiente; por último, en servicios personales la proporción es menor en hogares con jefe independiente, desempleados e inactivos, y mayor en hogares cuyo jefe es patrón (siempre con respecto al hogar con jefe empleado).

El hecho de que el cónyuge del hogar sea receptor de ingresos también incide en el patrón de gastos, ya que en estos hogares la proporción del gasto en alimentos, vivienda y servicios personales es menor, y mayor en salud, transporte y educación.

La descripción de estos resultados muestra que son razonables; si nos limitamos a observar el comportamiento de la participación del gasto de alimentos, vemos que su importancia es menor (con respecto al gasto total) en la zona urbana y en las regiones más urbanizadas, también es menor con mayores grados de educación y, en general, se cumple la constatación empírica de Engel, que relaciona el bienestar económico inversamente con la participación del gasto en alimentos (Deaton, 1971).

Otro aspecto que va en el mismo sentido son los cambios en la importancia del gasto en otros bienes: aumentos del gasto relativo en salud asociados a mayor edad del jefe o a que sea pensionado, y menores gastos relativos en transporte en hogares con jefes que no trabajan.

#### ELASTICIDADES

El cuadro 4 muestra las elasticidades precio de las demandas marshallianas y hicksianas, y las elasticidades ingreso en el punto medio. En cuanto a la elasticidad ingreso, los grupos de salud y servicios personales tienen elasticidades mayores que 1, lo que indica que en estos grupos se encuentran algunos bienes que pueden ser de lujo; en salud, el “lujo” puede obedecer a que en este rubro se incluye la medicina prepagada o a que la seguridad en salud es más costosa para los hogares de mayores ingresos, por cuotas moderadoras y copagos más altos. En cuanto a servicios personales, la explicación no es muy clara ya que incluyen rubros tan disímiles como vestuario, transporte aéreo y pagos financieros; la alta elasticidad quizá obedezca a que se

incluyeron estos últimos. A este grupo lo siguen alimentos y educación, cultura y recreación, con elasticidades prácticamente unitarias, resultado no esperado, por lo menos en alimentos donde se esperaría una elasticidad menor que 1. Por último están los grupos de servicios de la vivienda y transporte, con elasticidades menores que 1; en transporte este resultado era esperable, pues solo incluye el transporte colectivo terrestre y los gastos de mantenimiento y operación del vehículo particular; en servicios de la vivienda debemos remitirnos al estudio del CID publicado en 2005, donde se muestra que el pago de servicios públicos domiciliarios constituye una alta porción de los gastos en vivienda y que los hogares dan alta prioridad al pago de esos servicios, aun mayor que la de alimentos. Lo que quizá también se relacione con la relativamente alta elasticidad ingreso de los alimentos.

Las elasticidades precio propio de las demandas hicksianas son negativas, como se esperaba. Los bienes con mayor elasticidad precio de la demanda hicksiana son educación y servicios personales, y el de menor elasticidad es transporte. Tal como se agruparon los bienes, casi todos los grupos son sustitutos netos entre sí; solo resultan complementos netos el de transporte con el de salud.

En cuanto a las elasticidades de la demanda marshalliana, que como se sabe incluye el efecto ingreso, los grupos de mayor elasticidad precio propio son educación, salud y vivienda, mientras que transporte es el único grupo con elasticidad menor que 1. Un resultado extraño es la alta elasticidad precio de la vivienda (1,35), que no es consistente con su baja elasticidad gasto; la única manera en que así podría ocurrir es que existan bienes sustitutos importantes, y en el caso de la vivienda solo dos grupos aparecen como sustitutos brutos: alimentos y servicios personales; y el primero es el de mayor grado de sustituibilidad. Esto mostraría una interrelación entre vivienda y alimentos ya que ambos grupos contienen bienes que se comportan como necesarios, en alimentos esto es lo esperado, y en vivienda el componente de servicios públicos, porque los hogares dan prioridad a esos pagos.

#### ESCALAS DE EQUIVALENCIA

En esta sección se presentan los resultados de escala de equivalencia, es decir, la estimación de los valores de niños de 0 a 7 años, y de 8 a 17, en términos de un adulto. Como se mostró en la tercera sección, para obtener la escala de equivalencia se hicieron las modificaciones demográficas trasladando las funciones de demanda, con la escala de equivalencia definida en (19):

## Cuadro 4

## Elasticidades del AIDS cuadrático con precios por niveles

Elasticidades precio marshallianas							
	Alimentos	Vivienda	Salud	Transporte	Educación	Servicios personales	Elasticidad Ingreso
Alimentos	-1,30414	0,53425	0,00656	-0,04948	-0,04453	-0,16532	1,02266
Vivienda	0,47035	-1,35290	-0,04060	-0,02375	-0,01370	0,08082	0,87977
Salud	0,02177	-0,38008	-1,19592	-0,22078	0,22816	0,33518	1,21166
Transporte	-0,14433	-0,08099	-0,12948	-0,68286	-0,03728	0,15201	0,92292
Educación y cultura	-0,11014	-0,06934	0,13880	-0,03640	-1,37959	0,48007	0,97660
Servicios personales y otros	-0,26662	0,02256	0,11170	0,05684	0,26477	-1,36070	1,17145
Elasticidades precio hicksianas							
	Alimentos	Vivienda	Salud	Transporte	Educación	Servicios personales	
Alimentos	-1,02947	0,85937	0,06359	0,03800	0,05909	0,00942	
Vivienda	0,70664	-1,07320	0,00846	0,05151	0,07545	0,23114	
Salud	0,34720	0,00513	-1,12834	-0,11713	0,35093	0,54221	
Transporte	0,10355	0,21242	-0,07800	-0,60392	0,05624	0,30971	
Educación y cultura	0,15215	0,24114	0,19326	0,04714	-1,28063	0,64694	
Servicios personales y otros	0,04801	0,39498	0,17703	0,15705	0,38347	-1,16054	

$$EE=C(u, p, d^1)/C(u, p, d^0) = P^1(p, d^1)/P^0(p, d^0)$$

$Ln(P^1(p, d)) = \sum_i t_i(d) \ln p_i t(d)$  son las funciones demográficas de traslación.

El cuadro 5 muestra las escalas de equivalencia obtenidas. La comparación entre los dos grupos de edades en que se dividieron los niños toma un hogar de referencia de un adulto, y obtiene una equivalencia adulto de 68,2% para un niño menor de 7 años y de 66,3% para los mayores de 7.

Cabe resaltar dos aspectos de este resultado; primero, aunque la diferencia sea pequeña, el niño de 7 años o menos tiene una equivalencia mayor que la del niño de 8 años y más, lo que es contraintuitivo, pero consistente con casi todos los ejercicios anteriores<sup>15</sup>. El segundo aspecto que cabe resaltar es la pequeña diferencia entre la equivalencia de los menores de 8 años y los de 8 y más, lo que sugiere que no vale la pena separar estos dos grupos.

Por último, en el cuadro 5 se introduce una interpretación entre las diferencias que se presentan entre la  $P$  de dos adultos y un adulto, como medida de posibles economías de escala en consumo, ya que diría que un segundo adulto equivale al 71% del primero, es decir,

<sup>15</sup> Ver Muñoz (2004); en todos los ejercicios que allí se muestran usando Working y Leser ampliado se encuentra este resultado; en ejercicios posteriores con la misma encuesta ECV2003 se obtuvo lo mismo. En Muñoz (2004, cap. IV), con una metodología totalmente diferente se obtiene, en algunos ejercicios, que los adolescentes de 15 a 17 años son los de menor equivalencia, en comparación con los demás grupos de niños. Solo cuando la agrupación es igual a la de este trabajo y se separan los adultos por sexo, se obtiene un resultado diferente.

que habría una economía de escala en consumo del 77,3%, no muy diferente de las obtenidas anteriormente<sup>16</sup>.

Cuadro 5  
Escalas de equivalencia

Niños de 0 a 7 y de 8 a 17 años		Economía de escala	Reestructuración de equivalencia
PT_ref(2)	0,315334587		
P0_7	0,152534605		0,68226687
P8_17	0,148192603		0,66284568
PT_ref(1)	0,223570294	0,70899388	
	q	0,77314723	

## AMANERA DE CONCLUSIONES

En esta sección final se resaltan los principales resultados de la investigación que formalmente comenzó hace dos o tres años, pero que continúa el trabajo presentado en Muñoz (2004), con variantes en el enfoque del problema de escalas de equivalencia a la luz de los trabajos de Perali.

Uno de los aspectos que cabe resaltar es la posibilidad de usar precios en las estimaciones de demanda deducidas a partir de las encuestas de corte transversal que se hacen a los hogares, en las que no hay información de precios; es decir, la posibilidad de usar los precios de Lewbel; si esa posibilidad se cristaliza, muchos de los problemas que enfrentamos cuando estimamos los sistemas de demanda de los hogares pueden ser medianamente resueltos, ya que existirían los precios para hacer estimaciones más creíbles.

Pero la estimación de los precios de Lewbel es muy exigente en información y, por ello, su construcción no es muy sencilla. No basta una información de gastos muy agregada; rubros como “mercados completos” (que pesan mucho en las encuestas) son indeseables porque no permiten construir los pseudo índices y obligan al investigador a agregar los gastos en una forma adecuada<sup>17</sup>.

<sup>16</sup> Las economías de escala en consumo obedecen a que no se necesita multiplicar por 2 los gastos cuando el número de personas se multiplica por 2, pues algunos bienes se comparten sin disminuir la utilidad de las personas.

<sup>17</sup> En la tesis de Andrés Ballesteros, quien usó las encuestas de Calidad de Vida de 1997, 2003 y 2008, se presentó el mismo problema y se terminó usando la desagregación que aquí se presenta. En el trabajo de grado de Miguel Casallas (2010), en el que se usó una encuesta especializada, la de Ingresos y Gastos de los Hogares 2006-2007 del DANE, el principal problema que se enfrentó fue el de crear grupos razonables, dada la escasez de información; la mayoría de los hogares reportan 0 gastos en bienes diferentes a alimentos, y en estos no reportan los rubros solicitados, sino que todo va en los “mercados completos” ya mencionados.

La estimación de estos precios permite obtener elasticidades precio y elasticidades ingresos sin los problemas que aparecen cuando solo se dispone del ingreso (o gasto) de los hogares. Otro aspecto destacable de este trabajo es la manera de abordar el problema de identificación que se presenta para estimar escalas de equivalencia, ya que al garantizar el cumplimiento de la propiedad IB, podemos recobrar, “excepcionalmente”, las escalas de equivalencia.

Las escalas de equivalencia estimadas son muy parecidas a las que se obtienen con otros métodos, lo cual lleva a pensar que la estimación es razonable, y que el que aquí se presenta es un avance y un aporte a la estimación de escalas de equivalencia y economías de escala en consumo en el país.

Si bien el uso de los precios de Lewbel tiene gran potencial, como se ha mostrado, se debe seguir trabajando en el aspecto metodológico para mejorar algunos puntos débiles, como el paso de pseudo índices regionales a precios nominales y la clasificación de los bienes para obtener una agrupación más adecuada.

## ANEXO

### 1. LAS AGRUPACIONES DE BIENES

Primero se hizo una clasificación exhaustiva de los bienes y servicios que se preguntan en la ECV2003, buscando que en cada grupo quedaran los bienes más homogéneos. Se propuso la siguiente clasificación:

1. Alimentos: todos los alimentos comprados por el hogar, incluidas las comidas fuera de casa.
2. Bebidas y tabaco: cigarrillos, tabaco y bebidas alcohólicas.
3. Vestuario y calzado.
4. Servicios de la vivienda: arriendos, imputación del arriendo para los propietarios, ocupantes de hecho y usufructuarios, pago de servicios públicos, artículos para aseo del hogar, combustibles y gastos de administración o celaduría.
5. Enseres y utensilios para el hogar: colchones, cobijas, manteles, ropa de cama, ollas, vajillas, cubiertos y otros utensilios domésticos.
6. Salud: medicamentos, consultas médicas, servicios hospitalarios, aparatos ortopédicos, lentes y similares, exámenes de diagnóstico, seguros médicos y planes complementarios de salud.
7. Transporte y comunicaciones: pasajes, bicicletas, gasto en celulares, radio teléfonos.

8. Recreación y servicios culturales: diversiones (cines, discotecas, ferias), periódicos y revistas, libros y discos, juguetes y pagos por vacaciones, compra de mascotas, hoteles y cuadros u obras de arte.

9. Educación: pago de pensiones y matrículas, transporte escolar, alimentación, compra de textos y útiles escolares, uniformes.

10. Bienes y servicios personales: loterías, funerales, regalos, anillos, relojes y otras joyas, artículos para aseo personal, fósforos y encendedores, lustrado de zapatos, lavado de ropa, peluquería y manicura.

11. Otros pagos: pago de tarjetas de crédito, pago de otros préstamos diferentes de vivienda, seguros de vida, vehículo, incendio, robo, etc. y transferencia de dinero a otros hogares.

Esta clasificación corresponde a la manera de detallar los bienes en las encuestas de calidad de vida. Pero dada la forma en que se presenta la información del IPC se decidió trabajar con los grupos y subgrupos que allí se contemplan:

1. Alimentos: cereales y productos de panadería, tubérculos y plátanos, hortalizas y legumbres, frutas, carnes y derivados de la carne, pescado y otras de mar, lácteos, grasas y huevos, alimentos varios y comidas fuera del hogar.

2. Vivienda: gasto de ocupación de la vivienda, combustibles y servicios públicos, aparatos domésticos, utensilios domésticos, ropa del hogar artículos para limpieza.

3. Vestuario: vestuario, calzado, servicios de vestuario y calzado.

4. Salud: servicios profesionales, bienes y artículos para cuidado de la salud, gastos de aseguramiento privados en salud.

5. Educación: instrucción y enseñanza, artículos escolares y otros relacionados.

6. Recreación y cultura: artículos culturales y otros relacionados, aparatos para la diversión y esparcimiento, servicios, aficiones, distracción, esparcimiento.

7. Transporte y comunicaciones: transporte personal, transporte público y comunicaciones.

8. Gastos varios: bebidas alcohólicas, tabaco, cigarrillos, artículos para el aseo, cuidado personal, artículos de joyería y otros personales, otros bienes y servicios.

Esta clasificación es un poco diferente de la inicial porque bebidas y tabaco están en gastos varios, pero en general son muy parecidas. Infortunadamente, no fue posible mantener esta clasificación por falta de información.

## 2. PROCEDIMIENTO DEL MODELO

ITSUR no lineal – Resumen de errores residuales						
Ecuación	DF Modelo	DF Errores	SSE	MSE	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> ajustado
WAL	29	8601	168,5	0,02	0,3624	0,3603
WVI	29	8601	142,7	0,017	0,4010	0,3990
WSAL	29	8601	27,8	0,003	0,1080	0,1051
WTR	29	8601	54,5	0,006	0,0918	0,0888
WEDUCUL	29	8601	40,6	0,005	0,3345	0,3324

El listado de los parámetros estimados se puede consultar en la página web de la revista.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Atella, V.; M. Menon y F. Perali. “Estimation of unit values in cross-sections without quantity information and implications for demand and welfare analysis”, Verona, Università degli Studi di Verona, 2003.
2. Ballesteros, A. “Estimación de precios implícitos a partir de la información de gasto contenida en las encuestas de calidad de vida del DANE”, tesis de maestría, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia, año.
3. Casallas, M. “Diferencias entre los precios implícitos y los precios de Lewbel”, trabajo de grado, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, junio de 2010.
4. CID. “Equidad en las tarifas de los servicios públicos: impacto de la capacidad de pago de los hogares de Bogotá D.C.”, Bogotá, abril de 2005.
5. Deaton, A. “The analysis of household surveys: A microeconomic approach to development policy”, World Bank, Johns Hopkins University, 1997.
6. Deaton, A. y J. Muelbauer. *Economics and consumer behavior*, Cambridge, Cambridge University Press, 1980a.
7. Deaton, A. y J. Muelbauer. “An almost ideal demand system”, *American Economic Review* 70, 1980b, pp. 312-336.
8. Hoderlein, S. y Mihaleva, S. “Increasing the price variation in a repeated cross section”, *Journal of Econometrics* 147, 2008, pp. 316-325.
9. Lasso V., F. J. “Economías de escala en los hogares y pobreza”, tesis de maestría, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia, 2002.
10. Lewbel, A. “Identification and estimation of equivalence scales under weak separability”, *Review of Economic Studies* 56, 1989, pp. 311-316.
11. Menon, M. y F. Perali. “Econometric identification of the cost of maintaining a child”, working paper, Departamento de Economía, Universidad de Verona, 2009.
12. Muñoz C., M. “Necesidades, consumo de subsistencia y pobreza”, tesis doctoral, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2004.

13. Pashardes, P. "Bias in estimating the almost ideal demand system with the Stone index approximation", *Economic Journal* 103, 419, 1993, pp. 908-915.
14. Perali, F. *The behavioral and welfare analysis of consumption*, Amsterdam, Kluwer Academic Publishers, 2003.
15. Pizzo, L. "The impact of economic changes of the Italian social welfare: A microsimulation approach", tesis de doctorado, Universidad de Padua, 2009.
16. Rairán C., I. D. "Escalas de equivalencia y consumo de subsistencia: una aplicación para Bogotá, tesis de maestría, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2010.
17. Varian, H. *Análisis microeconómico*, 3.<sup>a</sup> ed., Barcelona, Editorial Bosh, 1992.